Jean Lassègue, «Turing, entre le formel de Hilbert et la forme de Goethe», in *Matière première, Revue d'épistémologie et d'études matérialistes*, n° 3/2008 : «Modèles, simulations, systèmes», sous la direction de Jean-Jacques Kupiec, Guillaume Lecointre, Marc Silberstein et Franck Varenne, Paris, © Syllepse, pages 57-70.

Turing, entre le formel de Hilbert et la forme de Goethe

Jean LASSÈGUE

Les travaux de Turing (1912-1954) s'inscrivent principalement dans deux traditions scientifiques. La première, de nature formaliste, a le statut du calcul pour objet : Turing s'y est distingué en réussissant à circonscrire le domaine du calculable par opposition à celui de l'incalculable[1] ; la deuxième, proche de la *Naturphilosophie*[2], assigne à la notion de forme naturelle et en particulier à celle de forme biologique, un rôle central : Turing y a produit un modèle chimique dit de « réaction-diffusion » visant à expliquer l'apparition des formes biologiques à partir d'un substrat indifférencié. Ces deux champs scientifiques n'ont *a priori* rien à voir, ne serait-ce que parce que l'un porte sur des objets idéaux tandis que l'autre relève des sciences de la nature. Confronté à cette diversité, rien n'empêche de considérer que les intérêts personnels de Turing ont évolué au cours de sa carrière ; on interprète alors cette évolution comme purement contingente et on la justifie en faisant appel à une psychologie se limitant à l'empirique. Mais on peut aussi considérer que cette évolution n'est pas le fruit du hasard et qu'elle reflète une évolution objective, au sens où elle manifeste le déploiement d'une seule et même idée, transversale par rapport à la dichotomie entre sciences des idéalités et sciences de la nature. C'est ce point de vue que je vais

1. De façon intuitive, le *calcul* consiste à produire un résultat univoque, généralement numérique, au moyen d'une procédure dont les étapes sont intégralement définies. À partir des années 1930, l'un des buts que s'est assignée la logique mathématique a été de clarifier la nature de cette notion intuitive. On précise alors la notion d'*algorithme* conçu comme suite réglée d'opérations, en montrant le rapport qu'elle entretient avec la notion de *fonction arithmétique*. Une fonction est dite « calculable » quand il est possible d'exhiber un algorithme permettant d'exécuter le calcul qu'elle décrit. Turing a montré en quel sens certains problèmes pouvant s'exprimer sous forme arithmétique n'avaient cependant pas de solution calculable, c'est-à-dire ne possédaient pas d'algorithme permettant de produire, de façon absolument générale, un résultat univoque en une suite finie d'étapes.

2. La « Philosophie de la nature » est un mouvement de pensée d'origine allemande qui, à partir du début du 19e siècle, a tenté de rendre compte de façon rationnelle des phénomènes vitaux, de leur organisation et de leur finalité.

défendre dans les pages qui suivent : non seulement Turing a produit des résultats qui s'inscrivent dans deux traditions scientifiques mais il se situe *à la croisée* de ces deux traditions et, plus encore, son œuvre *constitue* précisément cette tentative de croisement. Non pas qu'il en réalise, à proprement parler, une synthèse ; il s'agirait plutôt d'un parcours à partir d'une idée-force que l'on peut résumer de la manière suivante : réussir à produire une forme organisée consiste à *séparer la forme calculable d'un fond non-calculable*. Cette idée-force conduit Turing à adopter une méthode spécifique à l'œuvre dans toutes ses investigations scientifiques et qui consiste à *étendre maximalement* la portée du calculable une fois reconnue une *frontière logique* entre calculable et non-calculable. Il devient alors possible, à partir de cette remarque, d'envisager la totalité du parcours de Turing comme un approfondissement de cette idée et comme une mise en pratique de cette méthode.

Je vais commencer par brosser à grands traits les lignes directrices de l'itinéraire scientifique de Turing en commençant par les travaux qui le rendirent justement célèbres dès leur publication en 1936 et qui ont trait à la nature de la notion de calcul. Il faut, pour ce faire, revenir un instant sur la perspective formaliste telle qu'elle se présente dans les années 1920 et 1930.

1 – Sur la sémiologie du calcul formel

Certains principes directeurs gouvernant l'interprétation de la nature des signes mathématiques et logiques sont à l'œuvre dans la constitution d'une perspective formelle au sein des débats sur les fondements des mathématiques des années 1920 et 1930. Il faut les mettre au jour pour situer le point de vue propre à Turing dans ces débats.

1.1 – Première étape : le point de vue hilbertien

Quand on fait référence à la mise en place de la perspective formelle telle qu'elle fut progressivement constituée par Hilbert au début du 20^{e} siècle, on s'en tient généralement à l'idée que la *formalisation* axiomatique des mathématiques a consisté à écarter toute *interprétation* sémantique des notions fondamentales rencontrées dans les axiomatiques dites « à contenu », c'est-à-dire les axiomatiques qui définissent les notions fondamentales d'un champ en exhibant une liste minimale d'axiomes.

L'exemple historique le plus clair d'une axiomatique à contenu est aussi le plus ancien ; il s'agit de celui d'Euclide (3^{e} siècle avant J.-C.) qui, au début des *Éléments*, pose un certain nombre de propositions appelées « notions communes » ou encore « axiomes » par la tradition, que l'on doit accorder pour rendre ultérieurement les démonstrations possibles et qui concernent les rapports d'égalité et leurs transformations quand on leur fait subir des opérations d'adjonction, de retranchement, de doublement, de dichotomie, etc. Après le grand désordre survenu par l'apparition des géométries non-euclidiennes au 19e siècle qui remettaient en question un certain nombre des notions communes dont Euclide demandait qu'on les acceptât pour rendre les démonstrations géométriques possibles, Hilbert, dans son livre de 1899 sur les *Fondements de la géométrie*, tente une remise en ordre de la perspective axiomatique et fait le projet d'une axiomatique géométrique *sans contenu* – une axiomatique *formelle* –, qui serait la matrice de toutes les axiomatiques à contenu, ayant chacune un rapport particulier à l'espace selon que les « axiomes » euclidiens sont ou non respectés. Dans cet ordre d'idées, on cite la boutade de Hilbert qui, en géométrie, disait que, selon sa perspective, il devenait possible de remplacer « point », « droite » et « plan » par « bock de bière », « chaise » ou « table ». Cependant, en s'en tenant à l'idée qu'il suffit d'écarter tout contenu sémantique pour formaliser l'axiomatique, on se prive d'une véritable réflexion sur la nature du geste accompli, qui cache en fait une réflexion sémiologique plus subtile. Il y a en effet au moins deux principes sémiologiques à l'œuvre dans la formalisation mise en place par Hilbert.

Le premier principe, de nature phénoménologique, consiste à reconnaître le caractère préconceptuel de la reconnaissance des signes écrits ; Hilbert (1926) fait à ce propos appel à l'« […] existence de certains objets concrets extra-logiques qui, en tant que sensations immédiates, précèdent toute pensée. […] En ce qui concerne particulièrement les mathématiques, l'objet de notre étude sera donc les signes concrets eux-mêmes dont nous savons, du point de vue que nous avons adopté, distinguer et reconnaître la forme ». C'est cette attention quasi typographique portée aux signes écrits qui assure la traductibilité rendant possible la réduction de toutes les axiomatiques à l'axiomatique dite « formelle », une fois tenu pour acquis la disparition du rôle de fondement traditionnellement dévolu à la géométrie euclidienne.

Le deuxième principe, d'ordre philosophique, a trait à la façon dont les signes écrits sont manipulés. Uniquement dépendant de l'inférence logique, c'est la notion de progression pas à pas, déjà métaphoriquement appelée « mécanique[3] », qui en constitue le moteur. Entre les signes écrits et leur manipulation séquentielle, se glisse donc un deuxième principe qui justifie de s'en tenir à cette séquentialité : la finitude supposée de la pensée.

3. Par von Neumann (1927).

Hilbert (1923 : 160) le souligne : « […] Notre pensée est finitiste, quand nous pensons, se déroule un processus finitiste. » La manipulation finitiste des signes écrits exige donc en amont que le moteur extra-logique de cette manipulation – la pensée – ait en lui-même une *signification* finitiste.

On voit donc que le point de vue hilbertien consistant à éliminer le contenu sémantique des propositions dans les axiomatiques « à contenu » pour n'en conserver que l'aspect formel n'élimine cependant pas tout contenu, qui se trouve seulement limité à la reconnaissance typographique des signes écrits d'une part et repoussé à l'extérieur, dans la pensée rendant possible la manipulation de ces signes d'autre part.

1.2. – Deuxième étape : le point de vue gödelien

La grande nouveauté de la deuxième étape dans la mise au jour des principes sémiologiques du calcul formel est due à Gödel et a consisté à introduire un troisième principe, celui du *nombre comme principe de codage* :

> Les formules d'un système formel se présentent comme des séries finies de signes élémentaires […]. De manière analogue, les démonstrations ne sont, d'un point de vue formel, rien d'autre que des séries finies de formules. Il est indifférent […] de choisir tel ou tel objet comme signe primitif et nous choisirons à cet effet les nombres naturels. En conséquence, une formule est une suite finie de nombres naturels et une figure de démonstration, une suite finie de suites finies de nombres naturels (Gödel 1931).

La différence entre signes, formules et démonstrations se trouvent donc neutralisée dès lors que le nombre joue la double fonction d'outil de codage et de nombre proprement dit : il devient possible de calculer sur des nombres les rapports de dépendance entre formules. Cette nouveauté radicale a, d'un point de vue sémiologique, deux conséquences au moins. Elle permet d'envisager autrement la différence de statut entre les signes de l'axiomatique formelle et le moteur susceptible d'en effectuer la manipulation, à savoir la pensée conçue comme finitiste. En effet, le principe philosophique de la finitude de la pensée, principe complètement externe à l'axiomatique formelle proprement dite, se trouve jumelé à un principe technique, celui du codage au moyen de nombres entiers qui ne requiert pas le finitisme comme une règle arbitraire mais qui se plie seulement à la nature propre de son objet, à savoir l'arithmétique. D'autre part, en superposant codage numérique interne des formules et signification arithmétique externe des mêmes formules, le troisième principe rend possible la découverte de limitations internes à l'axiomatique formelle : la préservation de la cohérence de l'arithmétique passe en effet par la reconnaissance du fait qu'il existe une formule au moins dont le codage ne permet pas de décider de sa démontrabilité. Ce résultat tout à fait capital pour l'évolution ultérieure de la logique a suscité de nombreuses interprétations philosophiques et logiques, en particulier de la part de Turing, comme nous allons le voir plus loin. Notons seulement, à cette étape de l'analyse, que le codage numérique proposé par Gödel n'est pas le rejet de tout contenu de signification au sein de l'axiomatique formelle : il redéfinit plutôt la place légitime qui lui revient.

1.3 – Troisième étape : le point de vue turingien

Turing apparaît comme un *outsider* dans le champ de la logique mathématique quand il propose, hors de tout cadre formaliste, un modèle de la notion de calcul fondée sur l'identification *explicite* de la pensée du calculateur à un traitement finitiste des signes :

> Le comportement d'un homme en train de calculer est à tout instant déterminé par les symboles qu'il observe et par son « état mental » du moment. Nous supposerons que ce calculateur [*computer*] observe un nombre maximal M de symboles (ou de cases) à la fois (Turing 1936).

Cette identification explicite, rendant possible la mécanisation du calcul proprement dit au moyen de ce qu'il est convenu dorénavant d'appeler une « machine de Turing », recouvre les trois principes précédents. Premièrement, elle suppose une reconnaissance préconceptuelle des signes : un « calculateur » (humain ou machine) peut reconnaître des signes par simple *inspection*, au sens où ne sont reconnus que les signes écrits dont les formes typographiques correspondent à celles d'un répertoire défini à l'avance. Deuxièmement, elle suppose également une finitude de la pensée : un « calculateur » (humain ou machine) peut exécuter une liste de commandes (un programme) composée de signes écrits si on lui fournit des données adéquates préalablement retranscrites à l'aide de ce répertoire de signes. Troisièmement, elle suppose que le codage numérique opère une neutralisation interne de la différence sémantique entre signes de commande et signes de données : il s'agit de s'en tenir à la forme typographique des signes écrits sans se poser de question sur leur signification.

Turing ne propose donc aucun formalisme axiomatique nouveau permettant de rendre compte de la façon dont s'enchaînent les formules d'un système formel. En revanche, il décrit un *dispositif*, la « machine de Turing », dont on peut supposer qu'il pourrait avoir une contrepartie matérielle. Il s'agit là d'un changement radical de point de vue, qui implique un double mouvement. D'une part, le dispositif en question permet un traitement qui apparaît comme pleinement indépendant par rapport à tout système de codage ; compte tenu du fait qu'à la même période, Turing[4] et d'autres finissent par tomber d'accord sur le fait que tous les formalismes de type hilbertien (fonctions partielles récursives, lambda-calcul) encodent la même classe de fonctions, le dispositif proposé par Turing apparaît apte, du point de vue du traitement au moins, à dépasser les particularités de chacun. D'autre part, il rend pensable l'incarnation de ce traitement dans n'importe quel substrat matériel ; en effet, le dispositif en question ne dépend, dans son architecture, que de principes que l'on pourrait qualifier de « typographiques » (lecture, écriture, inspection ou effacement de caractères) et aucune caractéristique physique assurant la bonne marche de ce traitement typographique n'est spécifiée en tant que telle ; il peut donc, en droit, s'adapter à n'importe laquelle. D'où l'idée d'une réalisibilité du dispositif sous des formes multiples, indépendantes, au moins en droit, du substrat matériel.

On peut donc dire que ce qui se trouve rajouté par Turing aux principes sémiologiques développés lors des étapes antérieures de la perspective formelle, c'est *l'indépendance* du dispositif de traitement des signes *à la fois* par rapport aux codages employés et par rapport à la matière dans laquelle le traitement en question serait susceptible de pouvoir s'incarner. Notons qu'il ne s'agit pas exactement de ce que l'on a coutume d'appeler l'indépendance du « logiciel », – c'est-à-dire du dispositif de traitement – par rapport au « matériel » – c'est-à-dire du dispositif physique qui effectue le traitement – : celle-ci est plutôt présupposée et c'est dans chaque ordre, codage d'une part et matière physique de l'autre que va se déployer la stratégie théorique de Turing, consistant d'un même mouvement à tracer une limite entre le calculable et le non-calculable tout en étendant aussi loin que possible le domaine du calculable.

2 – Les limitations internes des formalismes et les stratégies théoriques turingiennes

Il faut commencer par prévenir un malentendu qui pourrait gêner la compréhension du lecteur. Il y a en effet un certain paradoxe à présenter *en continuité*, comme je viens de le faire, les principes sémiologiques de Hilbert, de Gödel et de Turing quand on sait que Gödel et Turing ont ruiné, par leurs résultats, le projet formaliste de Hilbert.

Hilbert avait en effet posé, au congrès de Bologne de 1928, la question de savoir (i) si l'axiomatique formelle était complète, au sens où toute formule peut y être démontrée ou réfutée ; (ii) si l'axiomatique formelle

4. Dans l'appendice de son article de 1936, Turing montre l'équivalence de son formalisme avec celui du lambda-calcul de Church.

était consistante, au sens où aucune formule contradictoire ne pouvait y être engendrée à partir des axiomes ; (iii) si l'axiomatique formelle était décidable, au sens où il existerait une méthode effective pour décider si une formule quelconque est vraie ou fausse. L'espoir de Hilbert était de parvenir à fournir des réponses positives pour les trois cas : l'axiomatique formelle serait complète (elle engendre tous les théorèmes), elle serait consistante (elle n'engendre que les théorèmes) et elle serait décidable (il existe une procédure effective pour décider si toute formule est ou non un théorème). En fait, les trois réponses se révéleront négatives. Les réponses aux deux premières furent apportées par Gödel en 1931 et la réponse à la troisième conjointement par Church et Turing en 1936. L'espoir de Hilbert était donc vain.

Il y a cependant un certain sens à présenter en continuité les principes sémiologiques suivis par les trois mathématiciens parce que c'est bien *de l'intérieur du projet formaliste* que le projet a avorté. En effet, c'est en radicalisant le projet hilbertien et en se situant exclusivement du point de vue du codage numérique et du traitement des signes écrits que des limitations internes au projet hilbertien se sont faites jour. Dans le cas de la limitation mise au jour par Turing qui porte sur la question de la décidabilité de tout problème mathématique, elle a consisté à exhiber un problème dont la décision, si elle pouvait se présenter sous la forme d'un calcul, serait contradictoire. Ce faisant, la limitation interne à la calculabilité permet de distinguer *de l'intérieur de* l'ensemble des entiers, et sans présupposer un ensemble numérique plus vaste – autrement dit, en restant dans les limites strictes de la finitude imposée dans le cadre de l'axiomatique formelle de Hilbert – entre un domaine du calculable et un domaine du non-calculable. Une fois ce résultat acquis, il restait donc à préciser ce qui, du point de vue des principes sémiologiques mis en place, rendaient inopérants les buts ultimes du projet de Hilbert.

2.1 – Le traitement logiciel : au-delà du codage

Dans les années qui ont suivi son résultat de 1936, Turing s'est interrogé, à l'occasion d'un travail très technique, sur la nature des facultés mathématiques utilisées pour parvenir aux résultats de limitation des formalismes. En 1939, faisant allusion à ses propres travaux comme à ceux de Hilbert et de Gödel, il lui semblait que ce qui rendait ces résultats possibles était le jeu de deux facultés, l'« ingéniosité » et l'« intuition ». Ces deux termes n'ont pas exactement, sous sa plume, la signification qu'on leur prête généralement. Écoutons-le :

> Le raisonnement mathématique peut être considéré de façon schématique comme l'exercice d'une combinaison de facultés que nous pouvons appeler l'intuition et l'ingéniosité. L'activité de l'intuition consiste à produire des jugements spontanés qui ne sont pas le résultat de chaînes conscientes de raisonnement. […] L'exercice de l'ingéniosité en mathématique consiste à aider l'intuition par des arrangements adéquats de propositions et peut-être par des figures géométriques ou des dessins. Dans les temps prégödeliens, certains pensaient que […] la nécessité d'un recours à l'intuition pourrait être entièrement éliminée. […] Nous avons essayé de voir jusqu'où il était possible d'éliminer l'intuition. Nous ne nous préoccupons pas de savoir quelle quantité d'ingéniosité est requise et nous faisons donc l'hypothèse qu'elle est disponible en quantité illimitée (Turing 1939 : § 11).

Turing semble donc défendre dans ce texte un point de vue hilbertien que l'on pourrait qualifier de *raisonné* : en effet, la position originelle de Hilbert consistant à tenter de supprimer toute intervention de l'intuition dans la sphère du formalisme en la cantonnant à un rôle externe de nature philosophique et à s'en tenir à l'ingéniosité que l'on qualifierait aujourd'hui de « programmable », fut bien mise en échec par les résultats de Gödel qui démontra l'existence inéliminable de propositions non formalisables tout en étant vraies, c'est-à-dire ayant l'intuition pour source. Ce que le résultat de Turing rend plus clair, même s'il était déjà virtuellement contenu dans celui de Gödel, c'est que l'ingéniosité *possède elle-même sa part d'inaccessible*. En effet, les résultats de limitation sont précisément des résultats de limitation *interne*, c'est-à-dire qu'ils affectent les formalismes de l'intérieur et sans qu'il y ait besoin d'invoquer un quelconque *au-delà* du périmètre numérique nécessaire à leur fonctionnement et en se cantonnant intégralement à la classe des nombres entiers et de leurs rapports arithmétiques[5]. La notion d'intuition ne vise donc pas à décrire une faculté externe, à tout jamais inaccessible ou accessible par des moyens non rationnels ; elle apparaît seulement en creux chaque fois qu'il est possible de poser un problème dont on démontre qu'il ne peut pas recevoir de solution sous la forme d'un calcul. Le but du texte de 1939 consiste alors à réduire maximalement le rôle de l'intuition sans qu'il soit possible de l'écarter absolument : c'est en ce

5. Le problème inaccessible au calcul que Turing pose en 1936 s'intitule « problème de l'arrêt » : un programme peut-il décider à l'avance, pour toute entrée et pour tout programme, si ce dernier s'arrête ou pas ? S'il y avait un programme qui pouvait décider si tout programme aboutit à un résultat pour toute entrée, c'est-à-dire s'arrête, il y aurait en quelque sorte comme la possibilité de trouver un résultat avant même qu'il ne soit effectivement obtenu. Turing montre qu'il y a là une contradiction. Il y a donc un problème pouvant s'exprimer de façon calculatoire (l'arrête ou l'absence d'arrêt d'une machine) dont la solution n'a pas de solution sous forme d'un calcul.

sens que j'ai parlé d'une « position hilbertienne raisonnée ». Comment rendre compte alors de l'idée d'un au-delà du codage ?

Dans son texte de 1939, c'est par prétérition que Turing répond à la question : il est possible, dit-il, de *passer sous silence* la question de la mesure de la quantité d'ingéniosité disponible ; autrement dit, il est possible d'utiliser le domaine du calculable *comme s'il s'agissait d'une ressource infinie*, en *maximisant* son rôle par rapport à celui de l'intuition. Il n'y a donc pas de réponse directe à la question du rapport entre l'intuition interprétée comme au-delà de l'ingéniosité et l'au-delà interne à l'ingéniosité elle-même. Pourtant, même s'il est traité par prétérition par Turing, ce point est cependant tout à fait capital parce que *c'est à partir de lui qu'une réflexion sur le rapport entre formel et forme devient possible*.

Penchons-nous, pour tenter d'éclaircir cette question, sur un texte ultérieur de Gödel dans lequel celui-ci fait remarquer que le concept de machine universelle de Turing est l'*exemple type* de machine dont le comportement *global* ne peut pas être prédit à l'avance, du fait de l'absence d'une procédure globale de décision concernant son comportement, comme Turing l'a prouvé en 1936 :

> Dans ce cas, on pourrait dire que la description complète de son comportement est infini parce qu'à cause de la non-existence d'une procédure de décision prédisant son comportement, la description complète ne pourrait être donnée qu'en énumérant toutes ces instances (Gödel 1966 : 56).

Deux points sont à souligner ici. Premièrement, le concept de machine universelle de Turing lui-même apparaît comme l'exemple type d'une expression émanant d'une intuition qui porte sur la nature du calcul ; en tant que concept, il s'agit donc bien d'une expression de l'intuition. Deuxièmement, le comportement de la machine universelle de Turing tel qu'il est décrit par Gödel apparaît comme une instance du « problème de l'arrêt » qui a servi à Turing en 1936 à démontrer le caractère inaccessible du point de vue du calcul d'un certain nombre de problèmes exprimables pourtant sous forme calculatoire. Une telle machine est donc d'un ordre de complexité tel qu'il est préférable d'étudier son comportement sur des instances particulières plutôt que de s'en tenir à une description « générale » qui resterait toujours inadéquate. Or le comportement relève bien de l'appréciation d'une forme : il devient donc nécessaire, dans le cas de la machine universelle de Turing, d'en passer par une appréciation de ses *formes* de comportement pour se faire une *idée* de *l'infinité* de ses instances possibles. L'infinité en question n'apparaît pas alors comme le moyen d'opérer une neutralisation maximale de l'intuition comme dans le texte de 1939 mais au contraire comme une façon d'en appréhender la *forme* interprétée comme *ce qui rend accessible* une ressource globalement inaccessible.

Venons-en maintenant à la deuxième partie du principe sémiologique développé par Turing qui concerne l'indépendance du dispositif du traitement des signes à l'égard de la matière physique dans lequel il est susceptible de s'incarner.

2.2 – Le dispositif matériel : au-delà du déterminisme prédictif

Quelle spécificité le dispositif de traitement doit-il avoir quand il est incarné dans une matière physique ? Turing répond en 1950 :

> L'état initial de la machine ainsi que les entrées une fois donnés, il est possible de prédire tous les états futurs. Cela nous rappelle les vues de Laplace. […] Le système de l'« univers pris comme un tout » est tel que de petites erreurs dans les conditions initiales peuvent avoir un effet énorme ultérieurement. […] C'est une propriété essentielle des systèmes mécaniques appelés plus haut « machines à états discrets » que ce phénomène ne se produise pas. Même si nous considérons les machines physiques réelles à la place des machines idéales, une connaissance relativement précise de l'état à un moment donné produit une connaissance relativement précise à n'importe quel moment ultérieur (Turing 1950 : § 5).

Autrement dit, la seule contrainte qui touche le dispositif physique de traitement, c'est que le *déterminisme laplacien* soit conservé pour assurer son fonctionnement interne, fondé sur *l'itération* des pas de calcul. Cependant, Turing n'est pas sans savoir, comme le prouve la citation ci-dessus, que le déterminisme laplacien n'est pas généralisable à l'échelle globale de la nature et que le cas laplacien est bien l'exception plutôt que la règle, comme l'a montré Poincaré dès le début du 20e siècle. Cette contrainte laplacienne est donc une contrainte forte et difficile à maîtriser techniquement. Mais elle indique surtout, d'un point de vue théorique, une limite entre la physique laplacienne *interne* au dispositif de traitement d'une part et la réalité physique *externe* qui n'est pas, globalement, de nature prédictible. Les phénomènes physiques susceptibles de recevoir un traitement laplacien ne sont donc pas tous réductibles à des descriptions en termes formels sur lesquels pourrait porter un calcul : le régime déterministe du calcul peut ne pas permettre de restituer leur forme.

On voit donc que, dans le cas du niveau formel comme dans le cas du niveau physique, Turing rencontre le même problème : celui de *préciser la nature du déterminisme*, ou plus précisément, une fois prouvé l'existence d'un au-delà du déterminisme à ces deux niveaux, celui de savoir si cet « au-delà » a un sens analogue au niveau formel et au niveau physique[6].

2.3 – L'impensé du rapport traitement logiciel/dispositif matériel

Confronté à cette difficulté de principe, on s'en tient généralement à l'idée que le traitement logiciel et le dispositif matériel n'ont aucun rapport de dépendance réciproque puisque le traitement logiciel, quel que soit le formalisme employé et pourvu qu'il respecte la contrainte de l'itération pas à pas, peut être physiquement effectué par n'importe quelle incarnation matérielle de la machine de Turing, pourvu que cette incarnation matérielle particulière respecte la contrainte du déterminisme laplacien. Pourtant, la question est beaucoup plus complexe. D'une part en effet, la possibilité d'une incarnation d'une machine logique dans la nature physique tient au fait qu'il existe *une même structure déterministe* entre l'itération au niveau formel et la causalité au niveau physique. Mais d'autre part, reste à savoir si l'« au-delà » du calcul, au niveau formel comme au niveau physique, ont ou non des rapports.

Quels rapports entretiennent donc l'au-delà du traitement logiciel et l'au-delà du dispositif matériel ? Dans les deux cas, cet au-delà manifeste un rapport de dépendance à ce qui n'est pas lui, c'est-à-dire à son environnement : dans le cas du traitement logiciel, cette dépendance à l'environnement s'exprime, selon que l'on se place du point de vue interne à l'itération pas à pas, par le biais d'un théorème d'impossibilité comme l'a montré Turing en 1936 ou, selon que l'on se place d'un point de vue intuitif, comme l'a fait Gödel, comme comportement ; dans le cas du dispositif physique, la dépendance à l'environnement apparaît directement par le biais de l'émergence des formes au cours du temps. C'est la raison pour laquelle Turing finit, à partir de 1950, par abandonner l'informatique[7] et concentrer son attention sur le problème de la morphogenèse des formes biologiques car c'est dans ce domaine que la dépendance à l'environnement se manifeste par le biais de la constitution des formes

6. Il y a donc une analogie entre le cas formel et le cas physique : de même que, dans la cadre de l'étude des formalismes, Turing présentait un problème *typiquement laplacien*, le problème de l'arrêt, qui devait *anticiper* sur le comportement de n'importe quel programme et dont la solution était insoluble ou que Gödel présentait la machine de Turing comme expression infinie d'une intuition, de même, dans le cadre du dispositif physique, le déterminisme prédictif de l'itération interne à la machine se heurte au comportement globalement non prédictible dans la nature.

7. On aurait pu attendre d'un des pères fondateurs de l'informatique qu'il tire profit de cette science nouvelle pour l'appliquer au cas de la biologie et qu'il soit l'auteur de la métaphore du « programme » en biologie : il est de la plus haute importance de bien voir qu'*il n'en est rien*. Turing avait déjà devancé les objections que l'on allait adresser, mais si longtemps après !, à la notion de programme en biologie par le biais de la méditation qu'il avait menée autour du statut de l'« au-delà » du calculable.

naturelles lors de la croissance. La *géométrie* des formes revêt alors une importance capitale.

Le modèle que Turing présente en 1952, dit de « réaction-diffusion » en est la preuve (Turing 1952). Il consiste en l'étude de la chimie rendant compte de l'organisation de certaines formes biologiques élémentaires. Le modèle vise à décrire l'apparition d'une forme géométrique discrète au sein d'un milieu au départ amorphe et homogène de nature continue. Turing s'intéresse à la conversion, au sein du vivant, d'une dynamique de nature chimique en forme géométrique*,* juste après le moment où le système quitte son état stable. Il fait, pour ce faire, l'hypothèse de l'existence de deux substances ou plus (appelées morphogènes) qui diffusent avec des vitesses différentes au sein d'un système (de cellules, par exemple). Turing décrit alors mathématiquement les équations de propagation des morphogènes : la compétition entre réaction et diffusion fait apparaître localement, hors de la situation finale instable, des ondes stationnaires qui sont un phénomène *d'auto-organisation* du milieu. Il « suffit » alors de maîtriser, même sans solution analytique générale, les paramètres de contrôle des équations de propagation des deux morphogènes pour déterminer les états stationnaires responsables de l'apparition de la forme. Turing s'en tient au cas linéaire, qui reste dans l'orbite laplacienne[8], même s'il reconnaît qu'il faudrait en venir à traiter le cas non-linéaire[9]. Il devient alors possible, dans le cas linéaire, d'opérer un calcul des conditions d'apparition de la forme qui rende possible la délimitation de son contour (en dimension 2) ou de son enveloppe (en dimension 3).

Ainsi l'attitude de Turing à l'égard du problème de l'interprétation de l'« au-delà » du calculable a-t-elle considérablement évolué. Alors qu'en 1939, Turing cherchait encore à maximiser le périmètre du calculable en négligeant autant que possible tout ce qui pouvait relever de l'expression de l'intuition, ce qui le conduisait dans les années 1940 à privilégier

---

8. « L'objet particulier de l'enquête consistait en l'étude des phénomènes au moment où le système entrait dans une phase instable. Pour rendre le problème mathématiquement faisable, il était nécessaire de faire l'hypothèse que le système ne déviait jamais très loin de son homogénéité originelle. Cette hypothèse était appelée "hypothèse de linéarité" parce qu'elle permettait de remplacer les fonctions générales de taux de réaction par des fonctions linéaires. L'hypothèse de linéarité est importante. Sa justification provient du fait que l'on s'attend à ce que les formes [*patterns*] produites dans les premières étapes quand l'hypothèse est valide ont une forte similarité qualitative avec celles qui s'imposent dans les étapes ultérieures quand elle ne l'est plus » (Turing 1952 : § 11).

9. « Concernant les fonctions non-linéaires pour les taux de réaction loin de l'état d'homogénéité, très peu de choses ont été dites. Tout traitement aussi systématique que celui donné pour le cas linéaire semble hors de question. […] La croissance peut devenir plus rapide qu'exponentielle. […] Ce phénomène peut être appelé "instabilité catastrophique". Dans le cas des systèmes bidimensionnels, l'instabilité catastrophique est à peu près universelle […] » (Turing 1952 : § 9).

l'analogie de structure entre le déterminisme de l'itération formelle et celui de la causalité physique et ce, jusqu'à la construction de l'ordinateur, il finit par découvrir, à partir des années 1950, qu'il était possible d'opérer une analyse d'un tout autre ordre dans laquelle l'« au-delà » du calculable cessait d'être négligé et pouvait être directement appréhendé au moyen de la géométrie adéquate.

3 – Conclusion : retour aux principes sémiologiques

Le parcours de Turing est exemplaire dans la mesure où la mise au jour d'une limitation interne au formalisme l'a conduit ultérieurement a une véritable révolution sémiologique. Parti d'une conception hilbertienne du signe écrit dans laquelle sa reconnaissance préconceptuelle est à la fois établie et repoussée à l'extérieur du domaine censé être exclusivement régi par le calcul, il a su pousser à la limite le point de vue en question jusqu'à le subvertir entièrement et faire surgir la question de l'apparition géométrique de la forme comme le problème fondamental du rapport entre calculable et non-calculable. De ce point de vue, Turing semble bien être parvenu à une conception du vivant proche de celle de Goethe, pour lequel est vivant ce qui se donne à lui-même comme signe sous l'aspect du principe organisateur interne de sa forme. Aussi Turing se serait-il retrouvé dans cette remarque de Goethe :

> Mais cette peau n'est pas quelque chose d'étranger, de superflu, c'est au contraire le récipient pur et diversifié dans lequel l'organisation est contenue, un récipient ayant émergé de son contenu (*in* Pouget 2001 : 98).

Références bibliographiques

Gödel K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I" ; trad. fr. in *Le théorème de Gödel*, Paris, Seuil, 1989 : 107-143.

Gödel K. (1966), "Letter to Burkes", *in* von Neumann (1966).

Hilbert D. (1923). "Die logischen Grundlagen der Mathematik", *Mathematische Annalen*, 88 : 151-165 ; trad. fr. *in* J. Largeault, *Intuitionisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin, 1992 : 131-144.

Hilbert D. (1926), "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95 : 161-190 ; trad. fr. *in* J. Largeault, *Logique mathématique - Textes*, Paris, Armand Colin, 1972 : 215-245.

Neumann J. von (1927), "Zur Hilbertschen Beweistheorie", *Mathematische Zeitschrift*, 26 : 1-46.

Neumann J. von (1966), *Theory of Self-Reproducing Automata*, London & Urbana, University of Illinois Press ; trad. fr. *Théorie générale et logique des automates*, Seyssel, Champ Vallon, 1996.

Pouget J.-M. (2001), *La science goethéenne des vivants. De l'histoire naturelle à la biologie évolutionniste*, Berne, Peter Lang. Citation de J.W. Goethe, *Artemis-Gedenkausgabe :*

Gedenkausgabe der Werke, Briefe und Gespräche, Hrsg. von Ernst Beutler, 24 Bde, Zürich, Artemis-Verlag, 1948-1954.

Turing A.M. (1936), “On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 : 230-265 ; trad. fr. *in* A.M. Turing, J.-Y. Girard, *La machine de Turing*, Paris, Seuil : 49-104.

Turing A.M. (1939), “Systems of Logic based on Ordinals”. Proceedings of the London Mathematical Society 45 (ser 2) : 161-228.

Turing A.M. (1950), “Computing Machinery and Intelligence”, *Mind*, LIX, 236, Oct. : 433-460 ; rééd. in *Collected Works of A.M. Turing*, vol. 3 : “Mechanical Intelligence”, 1992 : 133-160 ; accessible à <www.sscf.ucsb.edu/~sung/comm115/writing-define-computing/Computing-machine/ry.html> ; trad. fr. *in* A.M. Turing, J.-Y. Girard, *La machine de Turing*, Paris, Seuil : 133-175.

Turing A.M. (1952), “The Chemical Basis of Morphogenesis”, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, B 237 : 37-72.